CHAPITRE 21

THÉORÈME DE LÉVY

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Sauf mention explicite du contraire, les variables aléatoires considérées sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ on note $\hat{f}$ sa transformée de FOURIER. On commence par des rappels généraux concernant la densité de certains espaces.

Définition 21.0.1: Support d'une fonction

Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$. On appelle support de f l'ensemble

$$\mathrm{Supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Définition 21.0.2: Fonctions continues à support compact

On note $C_c^0(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions continues à support compact de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$.

Définition 21.0.3: Fonctions C^∞ à support compact

On note $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ à support compact de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$.

Définition 21.0.4: Suite régularisante

Soit $(\varphi_n)_n$ une suite d'éléments de $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. On dit que $(\varphi_n)_n$ est une suite régularisante si

— $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi_n \geq 0$;

— $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n(x)\mathrm{d}x = 1$;

— il existe une suite $(\varepsilon_n)_n \in (\mathbb{R}_*^+)^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Supp}(\varphi_n) \subset B(0, \varepsilon_n).$$

Lemme 21.0.5

L'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{C} & \\ x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{c} \exp\left(\dfrac{-1}{1 - \|x\|_2}\right) & \text{si } \|x\|_2 < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

où $c = \displaystyle\int_{B_{\|\ \|_2}(0,1)} \exp\left(\dfrac{-1}{1 - \|x\|_2}\right)\mathrm{d}x$ est une constante de normalisation, est une application de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ à support compact.

Proposition 21.0.6

Pour tout $n \geq 1$, on pose $\varphi_n : x \in \mathbb{R}^d \mapsto n^d \varphi(nx)$. Alors la suite $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ est une suite régularisante.

Lemme 21.0.7

L'espace $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $(C_c^0(\mathbb{R}^d), \| \ \|_\infty)$.

Démonstration. Soit $f \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$. En particulier $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. On considère la suite régularisante $(\varphi_n)_n$ de la proposition précédente. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $f_n = f * \varphi_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est bien définie car pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)\varphi_n(x-y)|\mathrm{d}y \leq \|f\|_1 \|\varphi_n\|_\infty < +\infty.$$

D'après le théorème de dérivation sous le signe-intégral, on a que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, φ_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$. Comme $f \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$, f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$. Ainsi $(\varphi_n * f)_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^d$. De plus pour tout $n \geq 1$, φ_n est à support compact et f également donc f_n l'est aussi. En effet, il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\|x\| \geq M \implies \varphi_n(x) = 0$ et $f(x) = 0$. Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\|x\| \geq 2M \implies f_n(x) = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|x\| \geq 2M$. On a

$$f_n(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\varphi_n(x-y)\mathrm{d}y$$

si $\|y\| \geq M$, on a $f(y) = 0$
si $\|y\| \leq M$, on a $\|x-y\| \geq \|x\| - \|y\| \geq 2M - M \geq M$ d'où $\varphi_n(x-y) = 0$
et ainsi $f_n(x) = 0$. $\square$

Lemme 21.0.8

L'espace $C_c^0(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $(C_0(\mathbb{R}^d), \| \ \|_\infty)$.

Démonstration. Soit $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\|x\| \geq A \implies |f(x)| \leq \varepsilon$. On pose

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } \|x\| \leq A \\ (A+1-\|x\|)f(x) & \text{si } A < \|x\| \leq A+1 \\ 0 \text{ sinon.} & \end{cases} \end{array}$$

Alors g est continue sur $\mathbb{R}^d$ à support compact et $\|g - f\|_\infty \leq \varepsilon$. $\square$

On déduit des deux lemmes précédents

Théorème 21.0.9

L'espace $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $(C_0(\mathbb{R}^d), \| \ \|_\infty)$.

Définition 21.0.10: Fonction caractéristique

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. La fonction caractéristique de X notée Φ_X est définie par

$$\begin{array}{rcl} \Phi_X : \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \mathbb{E}[\exp(i\langle X, t\rangle)] = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \exp(i\langle x, t\rangle)\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x). \end{array}$$

Proposition 21.0.11

Toute fonction caractéristique Φ_X est continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$, et vérifie $\Phi_X(0) = 1$. Si X est réelle et appartient à $\mathrm{L}^k(\mathbb{R})$, alors $\Phi_X \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\Phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k]$.

Démonstration. Soit X une variable aléatoire réelle qui a un moment d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $f : (x,t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \exp(itx)$. La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est de classe C^k pour tout x. Pour tout $l \in [\![1,k]\!]$ la dérivée l-ième est $t \mapsto i^l x^l \exp(itx)$ dont le module est majorée par x^l. En particulier

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2, \ \left| \frac{\partial^k f}{\partial t^k}(x,t) \right| \leq |x|^k$$

et $x \mapsto |x|^k$ est intégrable pour la loi de X par hypothèse. En appliquant le théorème de dérivation sous le signe intégrale à la fonction f et à la loi de X, on obtient que la fonction Φ_X est de classe C^k et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \forall l \in [\![1,k]\!] \ \Phi_X^{(l)}(t) = i^l \int_{\mathbb{R}} x^l \exp(itx) \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) = i^l \mathbb{E}[X^l \exp(itX)].$$

□

Définition 21.0.12

On note

$$C_b(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ continue et } \exists M \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ |f(x)| \leq M \}$$

l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continues et bornées.

$$C_0(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ continue et } \lim_{|x| \to +\infty} f(x) = 0 \}$$

l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui tendent vers 0 à l'infini (on dit aussi l'ensemble des fonctions nulles à l'infini ou fonctions évanescentes).

Remarque 21.0.13

On a $C_0(\mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R})$.

Définition 21.0.14: Convergence en loi

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle. On dit que $(X_n)_n$ converge en loi vers X si la suite de mesure $(\mathbb{P}_{X_n})$ converge étroitement vers $\mathbb{P}_X$. C'est à dire si

$$\forall f \in C_b(\mathbb{R}), \ \mathbb{E}[f(X_n)] = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n}(x) \underset{n \to +\infty}{\to} \mathbb{E}[f(X)] = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x).$$

Lemme 21.0.15: Convergence étroite et convergence faible

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle. On a équivalence entre

1. $(X_n)_n$ converge en loi vers X ;
2. $$\forall f \in C_0(\mathbb{R}), \ \mathbb{E}[f(X_n)] = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n}(x) \underset{n \to +\infty}{\to} \mathbb{E}[f(X)] = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x).$$

Démonstration. L'inclusion $C_0(\mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R})$ donne l'implication 1) $\implies$ 2). Montrons 2) $\implies$ 1). Soit $f \in C_b(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. On considère $A > 0$ tel que

$$\mathbb{P}(|X| \leq A) \geq 1 - \varepsilon.$$

Un tel A existe par continuité à gauche d'une mesure :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}_X([-n,n]) = \mathbb{P}_X\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n,n] \right) = \mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = 1.$$

On considère $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'unique fonction continue nulle en dehors de $[-2A, 2A]$ qui vaut 1 sur $[-A, A]$ et affine sur $[-2A, -A]$ et $[A, 2A]$. Remarquons que

$$\int_{\mathbb{R}} (1 - \varphi(x)) \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) \leq \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{|X|>A}(x) \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) \leq \mathbb{E}[\mathbf{1}_{|X|>A}] = \mathbb{P}(|X| > A) = 1 - \mathbb{P}(|X| \leq A) \leq \varepsilon. \ (\heartsuit)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on cherche à majorer

$$\left|\mathbb{E}[f(X)] - \mathbb{E}[f(X_n)]\right|$$

ainsi on écrit

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}[f(X)] - \mathbb{E}[f(X_n)]\right| &= \left|\mathbb{E}[(1-\varphi(X))f(X)] + \mathbb{E}[\varphi(X)f(X)] - \mathbb{E}[\varphi(X_n)f(X_n)] - \mathbb{E}[(1-\varphi(X_n))f(X_n)]\right| \\ &\leq \underbrace{\left|\mathbb{E}[((1-\varphi)f)(X)]\right|}_{\alpha_n} + \underbrace{\left|\mathbb{E}[(\varphi f)(X)] - \mathbb{E}[(\varphi f)(X_n)]\right|}_{\beta_n} + \underbrace{\left|\mathbb{E}[((1-\varphi)f)(X_n)]\right|}_{\gamma_n}.\end{aligned}$$

Or $\varphi f \in C_0(\mathbb{R})$ subséquemment par 2) on a $\beta_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Étudions α_n. En utilisant l'inégalité triangulaire, le fait que $1-\varphi \geq 0$ et ($\heartsuit$) on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\alpha_n \leq \|f\|_\infty \varepsilon.$$

Ainsi

$$\limsup \alpha_n \leq \|f\|_\infty \varepsilon.$$

Étudions γ_n. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\gamma_n &\leq \mathbb{E}[((1-\varphi)|f|)(X_n)] \\ &= \int_{\mathbb{R}} (1-\varphi(x))|f(x)| \mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n}(x) \\ &\leq \|f\|_\infty \left(\int_{\mathbb{R}} 1 \mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n}(x) - \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n}(x) \right) \\ &\leq \|f\|_\infty \left(1 - \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n}(x)\right)\end{aligned}$$

or d'après 2)

$$\|f\|_\infty \left(1 - \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n}(x)\right) \underset{n\to+\infty}{\to} \|f\|_\infty \left(1 - \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \mathrm{d}\mathbb{P}_{X}(x)\right).$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\limsup \gamma_n &\leq \|f\|_\infty \left(1 - \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \mathrm{d}\mathbb{P}_{X}(x)\right) = \|f\|_\infty \left(\int_{\mathbb{R}} 1 \mathrm{d}\mathbb{P}_{X}(x) - \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \mathrm{d}\mathbb{P}_{X}(x) \right) \\ &= \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}} (1-\varphi(x)) \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) \\ &\leq \|f\|_\infty \varepsilon \quad \text{d'après } (\heartsuit).\end{aligned}$$

Au final, on obtient que

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0,\ \limsup \left|\mathbb{E}[f(X)] - \mathbb{E}[f(X_n)]\right| &\leq \limsup \alpha_n + \limsup \beta_n + \limsup \gamma_n \\ &\leq \|f\|_\infty \varepsilon + 0 + \|f\|_\infty \varepsilon \\ &= 2\|f\|_\infty \varepsilon.\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout ε on en déduit que $\limsup \left|\mathbb{E}[f(X)] - \mathbb{E}[f(X_n)]\right| = 0$ et

$$\mathbb{E}[f(X_n)] \underset{n\to+\infty}{\to} \mathbb{E}[f(X)]$$

d'où 2) $\implies$ 1). □

Théorème 21.0.16: Théorème de LÉVY

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle. On a équivalence entre

1. $(X_n)_n$ converge en loi vers X ;
2. la suite $(\Phi_{X_n})_n$ converge simplement vers Φ_X.

Démonstration. Montrons 1) $\implies$ 2). Soit $t \in \mathbb{R}$. La fonction $f_t : x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(ixt)$ est continue est bornée. Ainsi d'après 1)

$$\mathbb{E}[f_t(X_n)] = \Phi_{X_n}(t) \underset{n\to+\infty}{\to} \mathbb{E}[f_t(X)] = \Phi_X(t).$$

D'où la convergence simple. Montrons 2) $\implies$ 1). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Montrons que

$$\mathbb{E}[\hat{f}(X_n)] \underset{n\to+\infty}{\to} \mathbb{E}[\hat{f}(X)].$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\mathbb{E}[\hat{f}(X_n)] = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)\mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n}(x) = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(t)\exp(-ixt)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n}(x).$$

Justifions que l'on peut appliquer le théorème de FUBINI-LEBESGUE. Notons $h : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $h(x,t) = f(t)\exp(-ixt)$. Les espaces mesurés $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_{X_n})$ et $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda_1)$ sont tous deux σ-finis. La fonction h est $\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable. On veut montrer que $h \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_{X_n}\otimes\lambda_1)$. On a d'après le théorème de FUBINI-TONELLI que

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |h(x,t)|\mathrm{d}t\mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n}(x) = \int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n}(x) = \|f\|_1\mathbb{P}_{X_n}(\mathbb{R}) = \|f\|_1 < +\infty.$$

Ainsi on peut appliquer le théorème de FUBINI-LEBESGUE. On a donc

$$\mathbb{E}[\hat{f}(X_n)] = \int_{\mathbb{R}} f(t)\left[\int_{\mathbb{R}} \exp(-ixt)\mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n}(x)\right]\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f(t)\Phi_{X_n}(-t)\mathrm{d}t.$$

On note $g_n : t \mapsto f(t)\Phi_{X_n}(-t)$. D'après l'hypothèse 1) la suite de fonctions $(g_n)_n$ converge simplement vers $g : t \mapsto f(t)\Phi_X(-t)$. De plus pour tout $(n,t) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}$ on a

$$|g_n(t)| \le |f(t)|.$$

Or $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda_1)$. Par conséquent, le théorème de convergence dominée assure que

$$\mathbb{E}[\hat{f}(X_n)] = \int_{\mathbb{R}} f(t)\Phi_{X_n}(-t)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\to} \int_{\mathbb{R}} f(t)\Phi_X(-t)\mathrm{d}t$$

et en remontant le chemin en sens inverse, on a

$$\mathbb{E}[\hat{f}(X_n)] = \int_{\mathbb{R}} f(t)\Phi_{X_n}(-t)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\to} \int_{\mathbb{R}} f(t)\Phi_X(-t)\mathrm{d}t = \mathbb{E}[\hat{f}(X)].$$

On vient de montrer que pour toute fonction $u \in \mathcal{F}(\mathrm{L}^1(\mathbb{R}))$ dans l'image de la transformation de FOURIER on a

$$\mathbb{E}[u(X_n)] \underset{n\to+\infty}{\to} \mathbb{E}[u(X)].$$

Comme $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est une bijection et que $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on en déduit que pour tout $u \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ on a

$$\mathbb{E}[u(X_n)] \underset{n\to+\infty}{\to} \mathbb{E}[u(X)]. \ (\spadesuit)$$

Le dernier ingrédient pour conclure est d'utiliser le fait que $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $(C_0(\mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$. Soit $f \in C_0(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Soit $u \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\|u - f\|_\infty \le \varepsilon$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)]\right| &= \left|\mathbb{E}[f(X_n) - u(X_n)] + \mathbb{E}[u(X_n)] - \mathbb{E}[u(X)] + \mathbb{E}[u(X) - f(X)]\right| \\
&\le \mathbb{E}[|f(X_n) - u(X_n)|] + \left|\mathbb{E}[u(X_n)] - \mathbb{E}[u(X)]\right| + \mathbb{E}[|u(X) - f(X)|] \\
&\le \|u - f\|_\infty + \left|\mathbb{E}[u(X_n)] - \mathbb{E}[u(X)]\right| + \|u - f\|_\infty \\
&\le 2\|u - f\|_\infty + \left|\mathbb{E}[u(X_n)] - \mathbb{E}[u(X)]\right|.
\end{aligned}$$

D'après $(\spadesuit)$ on en déduit que

$$\limsup \left|\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)]\right| \le 2\|u - f\|_\infty + 0 \le 2\varepsilon.$$

Ainsi d'après le lemme, $(X_n)_n$ converge en loi vers X. D'où 2) $\implies$ 1). $\square$